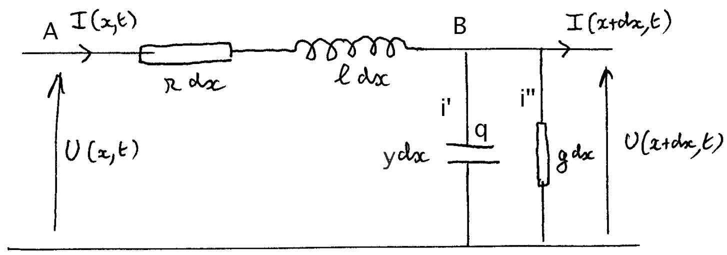
Propagation et réflexion dans un câble coaxial.

On modélise une portion de longueur dx d'un câble coaxial par la figure suivante :



où r, ℓ, γ et g désignent respectivement une résistance, une inductance, une capacité et une conductance *linéïques.*

Question 1 :
Trouver deux équations aux dérivées partielles vérifiées par la tension $U(x,t)$ ***et par l'intensité*** $I(x,t)$***.***

Considérons la branche AB, on a

$$(r\,\mathrm{d}x)\,I + (\ell\,\mathrm{d}x)\,\frac{\partial I}{\partial t} = V_A - V_B = U(x,t) - U(x+\mathrm{d}x,t) = -\frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{d'où}\quad \frac{\partial U}{\partial x} + r\,I + \ell\,\frac{\partial I}{\partial t} = 0 \qquad \text{(équation 1)}$$

La loi des nœuds en B donne

$$I(x,t) - I(x+\mathrm{d}x,t) = -\frac{\partial I}{\partial x}\,\mathrm{d}x = i' + i'' = \dot{q} + i'' = (\gamma\,\mathrm{d}x)\,\frac{\partial U}{\partial t} + (g\,\mathrm{d}x)\,U$$

$$\text{d'où}\quad \frac{\partial I}{\partial x} + g\,U + \gamma\,\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \qquad \text{(équation 2)}$$

Question 2 :
En déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par $U(x,t)$ ***(où ne figure pas*** $I(x,t)$***).***

L'idée est de tirer I de l'équation 2 et de le reporter dans l'équation 1 mais l'équation 2 donne $\frac{\partial I}{\partial x}$; on dérive donc l'équation 1 par rapport à x pour y reporter $\frac{\partial I}{\partial x}$, en se servant bien sûr du théorème de Schwartz.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r\,\frac{\partial I}{\partial x} + \ell\,\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = r\left(g\,U + \gamma\,\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \ell\,\frac{\partial}{\partial t}\left(g\,U + \gamma\,\frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = r\,g\,U + (r\,\gamma + g\,\ell)\frac{\partial U}{\partial t} + \ell\,\gamma\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad \text{(équation 3)}$$

Question 3 :
On recherche une solution propagative en $\exp \jmath\,(\omega\,t - k\,x)$***. Quelle relation lie*** ω***,*** k ***et les constantes du problème ? Que peut-on dire de la propagation au vu de cette relation de dispersion ?***

On pose $U(x,t) = \underline{U}\ \exp \jmath\,(\omega\,t - k\,x)$ que l'on reporte dans l'équation 3 ; on tire, après simplifications et changement de signe général :

$$k^2 = \ell\,\gamma\,\omega^2 - \jmath\,(r\,\gamma + g\,\ell)\,\omega - r\,g \qquad \text{(équation 4)}$$

On voit que si ω est réel, k et complexe, donc le milieu est absorbant, ce qui du reste n'est pas surprenant puisque les milieux sont résistifs et siège de l'effet Joule. De plus k n'est pas proportionnel à ω, le milieu est donc dispersif.

Question 4 :
On suppose que les rapports $\frac{r}{\ell\,\omega}$ et $\frac{g}{\gamma\,\omega}$ sont petits devant 1. Faire un développement limité donnant k à l'ordre 2 ; on pourra y poser $\ell\,\gamma = \frac{1}{c_0^2}$. En déduire les expressions de la distance caractéristique d'amortissement et de la vitesse de phase en fonction de ω et des constantes du dispositif. A quelle condition sur r, ℓ, γ et g le milieu n'est-il quasiment pas dispersif ?

Factorisons dans l'équation 4 le premier terme, prépondérant, soit $\ell\,\gamma\,\omega^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$, on tire

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}\left[1 - \frac{\jmath}{\omega}\left(\frac{r}{\ell} + \frac{g}{\gamma}\right) - \frac{1}{\omega^2}\frac{r\,g}{\ell\,\gamma}\right]$$

$$k = \frac{\omega}{c_0}\left[1 - \frac{\jmath}{\omega}\left(\frac{r}{\ell} + \frac{g}{\gamma}\right) - \frac{1}{\omega^2}\frac{r\,g}{\ell\,\gamma}\right]^{\frac{1}{2}}$$

On rappelle le développement à l'ordre deux d'une racine

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

où, ici, $x = -\frac{\jmath}{\omega}\left(\frac{r}{\ell} + \frac{g}{\gamma}\right) - \frac{1}{\omega^2}\frac{r\,g}{\ell\,\gamma}$ et où l'on ne conservera dans x^2 que les termes d'ordre deux en $\frac{1}{\omega}$ soit $x^2 = -\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{r}{\ell} + \frac{g}{\gamma}\right)^2$

$$k = \frac{\omega}{c_0}\left[1 - \frac{\jmath}{2\,\omega}\left(\frac{r}{\ell} + \frac{g}{\gamma}\right) - \frac{1}{2\,\omega^2}\frac{r\,g}{\ell\,\gamma} + \frac{1}{8\,\omega^2}\left(\frac{r}{\ell} + \frac{g}{\gamma}\right)^2\right]$$

soit, en ouvrant bien les yeux

$$k = \frac{\omega}{c_0}\left[1 - \frac{\jmath}{2\,\omega}\left(\frac{r}{\ell} + \frac{g}{\gamma}\right) + \frac{1}{8\,\omega^2}\left(\frac{r}{\ell} - \frac{g}{\gamma}\right)^2\right]$$

$$k = \frac{1}{c_0}\left[\omega - \frac{\jmath}{2}\left(\frac{r}{\ell} + \frac{g}{\gamma}\right) + \frac{1}{8\,\omega}\left(\frac{r}{\ell} - \frac{g}{\gamma}\right)^2\right] \qquad \text{(équation 5)}$$

posons

$$k' = \mathfrak{Re}(k) = \frac{1}{c_0}\left[\omega + \frac{1}{8\,\omega}\left(\frac{r}{\ell} - \frac{g}{\gamma}\right)^2\right] \qquad \text{et} \quad k'' = -\mathfrak{Im}(k) = \frac{1}{2\,c_0}\left(\frac{r}{\ell} + \frac{g}{\gamma}\right)$$

On a $k = k' - \jmath\,k''$ et, en notant $\underline{U} = U_m\ \exp \jmath\varphi$

$$U(x,t) = \mathfrak{Re}[\underline{U}\ \exp \jmath\,(\omega\,t - k\,x)] = U_m\ \exp(-k''\,x)\ \cos(\omega\,t - k''\,x + \varphi)$$

La distance caractéristique d'amortissement est $\delta = 1/k''$ et les vitesses de phase et de groupe sont telles que $1/V_\varphi = k'/\omega$ et $1/V_g = \frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}$

A l'ordre où l'on a effectué le calcul, le milieu est non dispersif si V_φ est une constante donc si k'/ω ne dépend pas de ω, soit si

$$\frac{1}{8\,\omega^2}\left(\frac{r}{\ell} - \frac{g}{\gamma}\right)^2 = 0$$

d'où la «condition d'Heaviside»

$$\frac{r}{\ell} = \frac{g}{\gamma}$$

Un câble coaxial bien conçu devra donc respecter cette condition, surtout si on l'utilise pour le transport d'informations sur une longue distance.

Question 5 :

On revient au cas général avec une onde progressive où $U(x,t) = \underline{U}\,\exp \jmath\,(\omega\,t - k\,x)$ ***et*** $I(x,t) = \underline{I}\,\exp \jmath\,(\omega\,t - k\,x)$***. Montrer*** $\underline{U} = Z_c\,\underline{I}$ ***où*** Z_c ***est constant pour une pulsation*** ω ***donnée. Que devient ce résultat pour une onde en*** $\exp \jmath\,(\omega\,t + k\,x)$ ***? Comment se simplifie le résultat si l'on néglige les effets dissipatifs ?***

On reporte dans l'équation 1 et l'on simplifie

$$-\jmath\,k\,\underline{U} + r\,\underline{I} + \jmath\,\ell\,\omega\,\underline{I} = 0$$

$$\underline{U} = \frac{r + \jmath\,\ell\,\omega}{\jmath\,k}\,\underline{I} \qquad \text{et} \quad Z_c(\omega) = \frac{r + \jmath\,\ell\,\omega}{\jmath\,k}$$

où l'on est censé reporter l'expression donnant k en fonction de ω. On aurait pu partir de l'équation 2 et on aurait obtenu un résultat apparemment différent, mais en fait identique compte tenu de l'équation 4.

Pour une onde en $\exp \jmath\,(\omega\,t + k\,x)$, les mêmes calculs mènent à $\underline{U} = -Z_c\,\underline{I}$, le seul changement étant le remplacement de k par $-k$.

Si l'on néglige les termes en r et en g, on a alors $Z_c = \frac{\ell\,\omega}{k}$ de façon brute. Mais alors l'équation 4 devient $k^2 = \omega^2/c_0^2$ et donc $k = \omega/c_0$ et

$$Z_c = \ell\,c_0 = \ell\,\sqrt{\frac{1}{\ell\,\gamma}} = \sqrt{\frac{\ell}{\gamma}}$$

résultat indépendant de ω dans ces conditions.

Question 6 :

Le câble coaxial est désormais semi-infini entre $x = -\infty$ ***et*** $x = 0$***. Un générateur à l'infini émet une onde en*** $\underline{A}\,\exp \jmath\,(\omega\,t - k\,x)$ ***; celle-ci se réfléchit partiellement en*** $x = 0$ ***sous forme d'une onde en*** $\underline{B}\,\exp \jmath\,(\omega\,t + k\,x)$***. En*** $x = 0$***, le conducteur intérieur du coaxial et son conducteur extérieur sont reliés par l'impédance d'entrée*** Z_e ***d'un appareil électrique, en déduire le coefficient de réflexion*** $r = \underline{B}/\underline{A}$***. Que devient ce coefficient en cas de circuit ouvert en*** $x = 0$ ***? de court-circuit ? Comment éviter que ne se forme l'onde réfléchie ?***

Dans le câble,

$$U(x,t) = \underline{A}\,\exp \jmath\,(\omega\,t - k\,x) + \underline{B}\,\exp \jmath\,(\omega\,t + k\,x)$$

Les liens entre U et I établis à la question précédente permettent d'affirmer

$$I(x,t) = \frac{1}{Z_c}\,\underline{A}\,\exp \jmath\,(\omega\,t - k\,x) - \frac{1}{Z_c}\,\underline{B}\,\exp \jmath\,(\omega\,t + k\,x)$$

Or en $x = 0$, on a pour le dipôle d'impédance Z_e, $U = Z_e\, I$ soit $U(0,t) = Z_e\, I(0,t)$ donc

$$\underline{A}\,\exp\jmath\,(\omega\, t) + \underline{B}\,\exp\jmath\,(\omega\, t) = Z_e\left[\frac{1}{Z_c}\,\underline{A}\,\exp\jmath\,(\omega\, t) - \frac{1}{Z_c}\,\underline{B}\,\exp\jmath\,(\omega\, t)\right]$$

$$Z_c\,(\underline{A} + \underline{B}) = Z_e\,(\underline{A} - \underline{B})$$

$$r = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} = \frac{Z_e - Z_c}{Z_e + Z_c}$$

Pour un circuit ouvert ($Z_e = \infty$), on a $r = 1$ et pour un court-circuit ($Z_e = 0$), on a $r = -1$; enfin il n'y a pas d'onde réfléchie $r = 0$ si $Z_e = Z_c$, il doit y avoir adaptation d'impédance entre le câble coaxial et l'appareil qu'il alimente.